Proprietà di un metodo: - approssimazione accettabile (minimizzare l'errore)
- velocità d'esecuzione (min. tempo e passi da fare)

↳ genera un risultato + un errore quantificabile.

*1) TEORIA DEGLI ERRORI

- a = valore esatto
- α = valore approx
  - per eccesso, se $\alpha > a$
  - per difetto, se $\alpha < a$
- $E = |\alpha - a|$ è detto errore assoluto per "a" quando al suo posto prendo "α".

↳ ma non conosco "a", quindi valuto $E \leq \varepsilon \Rightarrow a = \alpha \pm \varepsilon$

*1.1) Valori approssimati

- Valori abbreviati (ad "n" decimali): $V_n a$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

↳ tronco "a" all'n-esima cifra dalla virgola

↳ $E \leq 10^{-n}$

es: $a = 12{,}352\ldots$
$V_2 a = 12{,}35$
$V_{-1} a = 10$

- Valori arrotondati: $W_n a$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

↳ - tronco "a" all'n-esima cifra dalla virgola.
- aggiungo un'unità all'ultima cifra conservata, se la 1° cifra cancellata è 5, 6, 7, 8, 9.

↳ $E \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$

es: $a = 352{,}77\ldots$
$W_{-2} a = 400$, $W_0 \pi = 3$

Def: Un numero "a" ha "n" decimali esatti $\Leftrightarrow E \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-n}$

Def: $\eta = \frac{E}{|a|}$ è detto errore relativo, definito per $a \neq 0$, spesso espresso in %

↳ $1/\eta$ è detto grado di precisione per "a".

Def: Errore di una somma:

$E = |(a_1 + \cdots + a_n) - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)|$, $|\alpha_i - a_i| \leq \varepsilon_i$, $\forall i$

$\leq \sum_n |a_i - \alpha_i| \leq \sum \varepsilon_i$ → cioè $E \leq \sum \varepsilon_i$

es: usando tutti valori W_n → $E \leq \frac{n}{2} \cdot 10^{-n}$

NB: La differenza tra numeri molto uguali tra loro genera un forte errore:

es: $a_1 = 0{,}9863 \pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$
$a_2 = 0{,}9862 \pm \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$ → $a_1 - a_2 = 0{,}0001 \pm 0{,}0001$

↳ risultato = errore → non accettabile

↳ possibili soluzioni: – evitare se possibile la sottrazione $\left(1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

– operare con precisione maggiore

* 1.2) Rappresentazione di un numero

- base decimale: es: $(832,47)_{10} = 8\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 2\cdot 10^0 + 4\cdot 10^{-1} + 7\cdot 10^{-2}$
- base binaria: es: $(100,01)_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = (4,25)_{10}$

↳ il calcolatore utilizza quest'ultima rappresentaz.

* 1.2) Eventuali problemi

Def: Instabilità di un metodo:

Un metodo numerico si dice instabile se gli errori che compaiono, anziché rimanere limitati, crescono in modo tale da distruggere la soluzione.

Def: Malcondizionamento di un problema:

Un prob. si dice malcondizionato, quando una piccola variazione in un dato, provoca una grossa variazione nei risultati.

*2) FUNZIONI / INTERPOLAZIONI

Thm: Teorema del valor medio di Lagrange

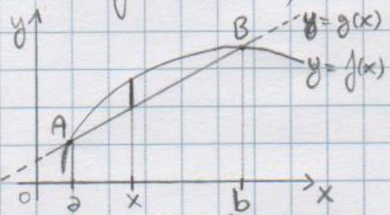
Sia $f(x) \in C^1(a,\alpha) \Rightarrow \exists c \in (a,\alpha) : f(\alpha) - f(a) = (\alpha - a)\cdot f'(c)$

$E = |f(\alpha) - f(a)| = |\alpha - a| \cdot |f'(c)| \leq \varepsilon \cdot M \; ; \; |f'(c)| \leq M$

↳ errore ass. per $f(a)$.

* 2.1) Interpolazione lineare diretta

Sia $f(x) \in C^2$, e si consideri la retta passante per due punti:



$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \leadsto y = g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\cdot(x-a) + f(a)$$

$I = [a,b]$

L'errore $f(x) - g(x)$ è nullo negli estremi A e B, ma non negli altri punti (vedi lunghezza del segmento)

Def: – interpolaz. lineare diretta: approssimo f con g in I

– estrapolaz. " " : " " fuori da I, purché f vi sia definita.

Thm: Sia $f(x) \in C^2[a,b] \Rightarrow \exists c \in]a,b[\, : f(x) = g(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$

$$\doteq g(x) + R$$

dove R è il resto dell'interpolaz.

Dim: Considerando $F(z) = f(z) - g(z) - (z-a)(z-b)R(x)$, $x \in]a,b[$

con $f(x) = g(x) - (x-a)(x-b)R(x)$

si ha che $F(a) = F(b) = F(x) = 0$

↳ Applico Rolle → · $\exists c_1 \in]a,x[\, : F'(c_1) = 0$

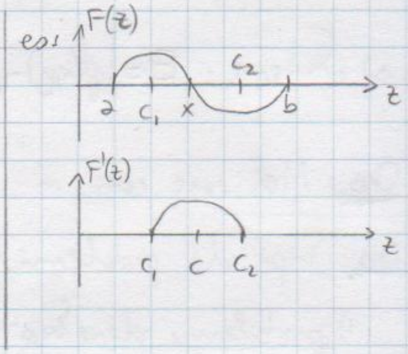
· $\exists c_2 \in]x,b[\, : F'(c_2) = 0$

↳ $F' \in C^1[c_1, c_2]$ e $F'(c_1) = F'(c_2) = 0$

↳ Riapplico Rolle → $\exists c \in]c_1, c_2[\, : F''(c) = 0$

$F''(z) = f''(z) - 0 - 2R(x)$

↳ $F''(c) = 0 \iff f''(c) - 2R(x) = 0 \iff R(x) = f''(c)/2$ □



$$E = |f(x) - g(x)| = |R| = \left| \frac{(x-a)(x-b)}{2} \cdot f''(c) \right| = \frac{(x-a)(b-x)}{2} |f''(c)|$$

$$\leq \frac{M}{2} \max\{(x-a)(b-x)\} = \frac{M}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{4} = M(b-a)^2/8$$

*2.2) Interpolazione lineare inversa

Sia $f(x) \in C^1$ ed invertibile in $[a,b]$, considerando:

$$\frac{f(x) - f(a)}{f(b) - f(a)} \doteq \frac{x-a}{b-a} \leadsto x = a + \frac{b-a}{f(b) - f(a)} [f(x) - f(a)] + R^*$$

e ricordando che per l'interp. lin. diretta $f(x) = g(x) + R$, si ha che:

$$x = a + [f(x) - f(a) - R] \frac{b-a}{f(b) - f(a)}$$

$$\doteq a + [f(x) - f(a)] \frac{b-a}{f(b) - f(a)} - R \frac{b-a}{f(b) - f(a)}$$

ponendo a sistema le due eq. si ottiene:

$$R^* = -R(b-a)/[f(b) - f(a)]$$

quindi $E = |R^*| = |R| \cdot (b-a)/|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot M}{8 \cdot |f(b) - f(a)|}$

Oss: In generale ad una formula esatta ne sostituisco una approssimata, commettendo un errore di troncamento/analitico (tolgo R) ed uno di arrotondamento/approssimazione, che contribuiscono assieme all'errore assoluto/relativo.

Dato $f(x,y) \in C^1$, e un punto $P_0(x_0,y_0)$, utilizzando il Teor. del valore medio:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0) f'_x(\xi,\eta) + (y-y_0) f'_y(\xi,\eta)$$

Con ξ, η cond. interne al segmento $\overline{P_0 P}$, dove $P(x,y)$ = pt. generico

sapendo che $\begin{cases} |x-x_0| \le \varepsilon_x \\ |y-y_0| \le \varepsilon_y \end{cases}$ e supponendo $\begin{cases} |f'_x(x,y)| \le M_x \\ |f'_y(x,y)| \le M_y \end{cases}$

si ottiene: $E = |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \le |x-x_0| \cdot |f'_x(\xi,\eta)| + |y-y_0| \cdot |f'_y(\xi,\eta)| \le \varepsilon_x M_x + \varepsilon_y M_y$

Oss: Nel caso con n variabili, si ha che $E \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{x_i} \cdot M_{x_i}$

Oss: Tipi di problemi/approcci risolutivi:

1) problema diretto: dispongo già di un algoritmo $\leadsto$ trovo E

es: devo calcolare $\sqrt{5} \cdot \pi^3$ $\leadsto$ $x = \sqrt{5}$ e $y = \pi$ $\leadsto$ $f(x,y) = x \cdot y^3$ $\leadsto$ E

2) problema inverso: fisso un $E = E^*$ $\leadsto$ trovo un algoritmo tale

es: voglio calcolare $\sqrt{5} \cdot \pi^3$ con $E = E^*$ $\leadsto$ pongo $\varepsilon_x M_x + \varepsilon_y M_y \le E^*$ con $M_\cdot$ noti $\rightarrow$ decido $\varepsilon_\cdot$

* 3) OPERATORI

Def: Un'operatore è un'operazione che trasforma: - sequenze in sequenze
- funzioni in funzioni

es: l'operatore lineare: $O(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 O(f_1) + c_2 O(f_2)$

*3.1) Operazioni

- Somma: $(O_1 + O_2) f = O_1(f) + O_2(f)$
- Prodotto: $(O_1 \cdot O_2) f = O_1(O_2(f))$
- Identità: $O = 1 \rightarrow 1 \cdot f = f$
- Inverso: $O^{-1} \rightarrow O O^{-1} = 1$

NB: $\cdot O_1(O_2 + O_3) = O_1 O_2 + O_1 O_3$

$\cdot O^2 = OO \,, \quad O^0 = 1$

* 3.2) Tipi di operatori

1) Traslazione/Spostamento/Shift $= E$: $E y_n = y_{n+1}$; $E f(x_n) = f(x_{n+1})$

2) Op. alle differenze discendenti $= \Delta$: | o Op. alle diff. in avanti

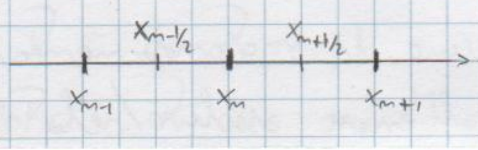
$\Delta f(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n)$; $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$

3) Op. alle differenze ascendenti $= \nabla$: | o Op. alle diff. indietro

$\nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1})$

4) Op. alle differenze centrali $= \delta$

$\delta f(x_n) = f(x_{n+1/2}) - f(x_{n-1/2})$



5) Media (centrale) = μ : $\mu f(x_m) = \frac{1}{2}\left[f(x_{m+\frac{1}{2}}) + f(x_{m-\frac{1}{2}})\right]$

6) Derivata = D : $D f(x) = f'(x)$, f derivabile

7) Integrale = J : $J f(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$, f integrabile

NB: Nel continuo gli operatori ① ÷ ⑤ usano x e $x \pm h$, con h = passo.

es: $\Delta^{n+1} f(x) = \Delta\left(\Delta^n f(x)\right) = \Delta^n f(x+h) - \Delta^n f(x)$

Oss: Potenze pari di δ:

$$\delta^2 f(x) = \delta\left(\delta f(x)\right) = \delta f\left(x+\frac{h}{2}\right) - \delta f\left(x-\frac{h}{2}\right) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$$

* 3.3) Formule fondamentali

1) $E y_m = y_{m+1} - y_m + y_m = y_m + \Delta y_m = (1+\Delta) y_m \Rightarrow E = 1+\Delta$ o $\Delta = E - 1$

$\hookrightarrow E^m = (1+\Delta)^m = 1 + \binom{m}{1}\Delta + \dots + \binom{m}{m}\Delta^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot \Delta^i$

es: $E^m y_0 = y_m = y_0 + \binom{m}{1}\Delta y_0 + \dots + \Delta^m y_0$

2) $\Delta^m = (E-1)^m = E^m - \binom{m}{1}E^{m-1} + \binom{m}{2}E^{m-2} + \dots + (-1)^m \binom{m}{m} E^0 = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} E^{m-i}$

es: $\Delta^m y_0 = y_m - \binom{m}{1} y_{m-1} + \binom{m}{2} y_{m-2} + \dots + (-1)^m y_0$

3) Operando nel continuo, sia $f \in C^m$ nel suo dominio D:

$\Delta^m f(x) = h^m \cdot D^m f(x + \theta_m \cdot m \cdot h)$, $0 < \theta_m < 1$, h = passo

Dim: per induzione su m:

$m = 1$, $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x + \theta_1 \cdot h)$ | applicato il teorema del val. medio

$m > 1$, $\Delta^m f(x) = \Delta \Delta^{m-1} f(x) = \Delta\left(h^{m-1} f^{(m-1)}(x + \theta_{m-1}(m-1)h)\right)$

$= h^{m-1}\left[h f^{(m)}(\xi)\right]$, $x < x + \theta_{m-1}(m-1)h < \xi < x + \theta_{m-1}(m-1)h + h < x + mh$

$= h^m f^{(m)}(\xi)$, $\xi = x + \theta_m m h$ □

Def: Differenze divise

- di ordine 0 : $f[x_0] = f(x_0)$
- di ordine 1 : $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$
- di ordine k : $f[x_0, \dots, x_k] = 1/(x_k - x_0) \cdot \left\{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]\right\}$

Oss: Le diff. divise sono funz. simmetriche, cioè l'ordine dei pt. non cambia il risultato.

es: $f[x_0, x_1] = f[x_1, x_0]$

4) $f[x_0,\dots,x_k] = \dfrac{\Delta^k y_0}{h^k \cdot k!}$, $y_i = f(x_i) = y_i$, x_i equispaziati di passo h

Dim: per induzione su k:

- $k=0$, $f[x_0] = y_0 = \Delta^0 y_0 / (h^0 0!)$
- $k=1$, $f[x_0,x_1] = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0) = \Delta y_0 / h$

suppongo vera per $k = n$

- $k = n+1$, $f[x_0,\dots,x_{n+1}] = \dfrac{f[x_1,\dots,x_{n+1}] - f[x_0,\dots,x_n]}{x_{n+1} - x_0}$

$$= \frac{1}{(n+1)h}\left[\frac{\Delta^n y_1}{h^n n!} - \frac{\Delta^n y_0}{h^n n!}\right] = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}\cdot(n+1)!} \quad \square$$

$x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$

$\Delta^{n+1} = \Delta\Delta^n y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0$

5) $f[x_0,\dots,x_k] = \dfrac{\Delta^k y_0}{h^k k!} = \dfrac{1}{\cancel{h^k} k!}\cdot \cancel{h^k} D^k f(x_0 + \theta_k \cdot k \cdot h) = \dfrac{D^k f(\xi)}{k!}$, $x_0 < \xi < x_k$

Oss: Sia $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m$ un polinomio di grado m, allora:

$\Delta^m f(x) = h^m f^{(m)}(x + \theta_m \cdot m \cdot h) = h^m m! \cdot a_0$ e $\Delta^{m+i} f(x) = 0$, $\forall i \geq 1$

Def: Quadro delle differenze finite discendenti:

x	$y=\Delta^0 y$	Δy	$\Delta^2 y$
$\vdots$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$
		Δy_{-2}	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$
		Δy_{-1}	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$
		Δy_0	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$
		Δy_1	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$
$\vdots$			

NB: $y_i = \begin{cases} y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \\ y_{i+1} - \Delta y_i \end{cases} = \begin{cases} (\text{sopra}) + (\text{a dx dei due}) \\ (\text{sotto}) - (\text{a dx dei due}) \end{cases}$

Oss: Considerando un polinomio di grado p, è possibile quindi costruire tutto il quadro, disponendo solo di $(p+1)$ valori consecutivi.

es: $y = 4x^2 - x + 3 \to$

$\hookrightarrow \Delta^2 f(x) = \Delta^2 y = 8$

valori noti di partenza $\to$ $x = -1, 0, 1$; $y = 8, 3, 6$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$\vdots$				
-2	21	-13	8	0
$\boxed{-1}$	$\boxed{8}$	-5	8	0
$\boxed{0}$	$\boxed{3}$	3	8	0
$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	11	8	0
2	17	19	8	0
3	36		8	0
$\vdots$				

- sviluppo $f(x)$ in serie di Taylor con resto di Lagrange
- Trascuro il resto → ottengo un polinomio → procedo col quadro.

Oss: Dato un polinomio di grado p nella forma $f(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i \cdot x^{p-i}$, per calcolarne il valore in un punto, vengono fatte $M = 2p-1$ moltiplicazioni e $S = p$ somme. Mentre riscrivendolo nella forma di Horner:

$$f(x) = \cdots\left\{\left[\left(a_0 x + a_1\right) x + a_2\right] x + a_3\right\}\cdots \quad , \quad M = S = p.$$

es: $f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_3 x + a_4 \rightarrow M: \{xx, x^2x, a_0x^3, a_1x^2, a_3 x\} \rightarrow \#M = 5$

$\stackrel{!}{=} \left[\left(a_0 x + a_1\right) x + a_3\right] x + a_4 \rightarrow M: \{a_0 x, (\cdot)x, [\cdot]\cdot x\} \rightarrow \#M = 3$

* 4) LE SERIE

Una serie è definita come:

$$S = \underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_{m-1}}_{S_m} + \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots}_{R_m} = S_m + R_m$$

S_m = serie ridotta m-esima
R_m = " resto m-esimo

il calcolatore approssima S con S_m:

$E = |S - S_m| = |R_m|$

NB: Una serie ed i suoi resti hanno lo stesso carattere (S con/diverge ⇒ R_m con/diverge)

* 4.1) Serie convergenti

- A termini di segno costante: $(+ + + + + \text{ o } - - - - -)$
  - Nota una maggiorante S^* di S, allora $E = |R_m| \le |A|$, con A = somma di S^*.
  - Uso il criterio del rapporto (di D'Alembert) o quello della radice per verificare la convergenza.

  ↳ Idem per le serie assolutamente convergenti: $|R_m|$ convergente ⇒ R_m converge
- A segni alterni: $(-+-+-+ \text{ o } +-+-+-)$
  - Uso il criterio di Liebnitz: se la successione $\{|u_m|\}$ è monotona decrescente, e $\lim_{m\to+\infty} u_m = 0$ ⇒ S converge e $E = |R_m| \le |u_m|$
- Di Taylor/McLaurin:
  - di Taylor: $R_m = \frac{h^m}{m!} f^{(m)}(x_0 + \theta_m h), \quad 0 < \theta_m < 1$
  - di McLaurin: $R_m = \frac{x^m}{m!} f^{(m)}(\theta_m x)$

  ↳ prendo i resti, li maggioro, e trovo E.

- errore di troncamento $|R_m|$
- errore della somma $|\bar{S}_m - S_m|$
- errore arrotondamento del risultato finale $|(\bar{S}_m)_{\bar{\omega}} - (S_m)_{\omega}|$

posso quindi fissare un m e calcolare l'E totale; oppure fissare una soglia E_0 per E, ponendo ogni tipo di errore $= E_0/3$, e ricavare m.

Oss: Con serie che convergono molto lentamente l'approccio sopra non va bene, è possibile tuttavia rimediare con:
- accelerazione della convergenza della serie (se possibile)
- utilizzo di rappresentaz./metodi alternativi (calcolo integrale, ecc...)

*4.2) Serie divergenti

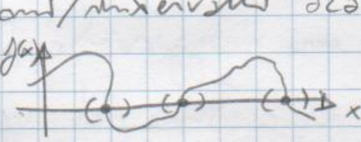
Anche queste serie possono essere utili; nel caso degli sviluppi asintotici $f(x) \simeq \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \, i! / x^{(i+1)} + R_{m+1}$ è possibile calcolare e limitare E. Tuttavia, fissato un m, si ha che $\lim_{x \to +\infty} E = 0 \Rightarrow E < \varepsilon$ e quindi posso calcolare $f(x)$ con un certo E, da un certo x^* in poi.

es: $\log \Gamma(x+1) \simeq \dots \rightarrow$ Serie di Stirling, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$

Oss: Solitamente si fissa m pari alla parte intera del valore x da calcolare

*5) SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI

Per trovare le radici di $f(x)=0$ cerco delle regioni/intervalli a 2 a 2 disgiunti, dove in ciascuno cada una sola radice,



ed applico in ognuno un certo metodo.

Oss: Se $f(x)$ è un polinomio uso formule/teoremi noti, altrimenti altri metodi.

*5.1) Metodi iterativi per radici semplici

Ora trattiamo solo radici semplici, cioè $f'(\xi) \neq 0$, $\xi \in (a,b)$.

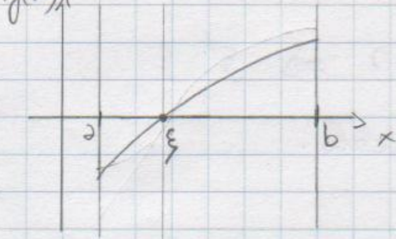
Def: Ordine di convergenza di un metodo iterativo:

Se $\exists p > 0$, ed $\exists c \neq 0$ costante t.c. $\lim_{m \to +\infty} \frac{|\varepsilon_{m+1}|}{|\varepsilon_m|^p} = c$, allora il metodo ha ordine di convergenza p e costante asintotica d'errore c.

NB: $p=1 \rightarrow$ conv. lineare | $p=2 \rightarrow$ conv. quadratica | $p=3 \rightarrow$ conv. cubica | $1<p<2 \rightarrow$ conv. superlineare

- Metodo di bisezione ($p=1$)

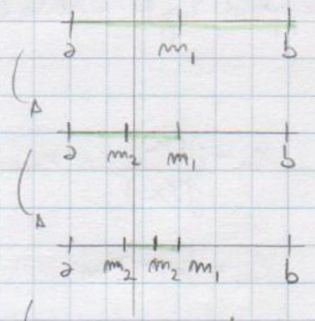
Assumo $f(x)$ continua, e $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè i valori negli estremi assumono segni opposti):



Thm: Sia $f(x) \in C^2[a,b]$, $f(a)\cdot f(b) < 0$, $f''(x)$ avente segno costante $\Rightarrow \exists!\, \xi \in \,]a,b[\, : f(\xi) = 0$.

Passi:

1) $m_* = (b-a)/2$;
2) if($f(m_*) \simeq 0$)
   $\xi = m_*$; STOP;
   else
   goto ③;
3) if ($[a, m_*]$ soddisfa il Thm)
   esamino ora $[a, m_*]$;
   else
   esamino ora $[m_*, b]$;
   goto ①;



↳ vado così finché l'approssimaz. non è accettabile.

$E = |\xi - m_k| \le (b-a)/2^k$

Oss: $0 \le |\xi - m_k| \le (b-a)/2^k \rightsquigarrow E \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

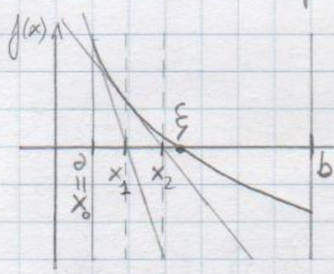
$\Downarrow$ 0 $\xleftarrow{k \to +\infty}$

Oss: $E < \varepsilon \Leftrightarrow (b-a)/2^k < \varepsilon \Leftrightarrow k > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$

Oss: Questo è un metodo semplice, ma a convergenza lenta.

- Metodo di Newton-Rapson (o delle tangenti) ($p=2$)

Sotto le stesse ipotesi del metodo di bisezione:



Passi:

1) Pongo x_0 pari al pt. in cui f e f'' hanno lo stesso segno.
2) Conduco la tangente alla curva in "a"; e ricavo l'intersezione con l'asse x:
$$\begin{cases} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases}$$
↳ $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$
3) $x_0 = x_1$;
   goto ②;

Si ha quindi $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, e $x_0 < x_n < \xi \Rightarrow \{x_n\}$ è successione monotona crescente e limitata a ξ, cioè:

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi^*$, $\xi^* = \sup\{x_n\}$ | NB: $\xi^* \le \xi$ perché ogni $x_n < \xi$

$$\xi^* = \xi^* - f(\xi^*)/f'(\xi^*) \iff f(\xi^*)=0 \ , \ \exists! \xi : f(\xi)=0 \Rightarrow \xi^* = \xi$$

Fermo l'algoritmo quando $(x_m - x_{m-1})$ è molto piccolo.

Convergenza:

$$f(\xi) = \underbrace{f(x_m) + (\xi - x_m) f'(x_m) + (\xi - x_m)^2 f''(\eta_m)/2}_{} \leftarrow \text{sviluppo di Taylor + resto Lagrange}$$

$$x_0 < x_m < \eta_m < \xi \quad , \quad f(\xi)=0$$

$$\to \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} + \xi - x_m + \frac{(\xi - x_m)^2}{2} \frac{f''(\eta_m)}{f'(x_m)} = 0$$

$$\to \xi - x_{m+1} + \frac{(\xi - x_m)^2}{2} \frac{f''(\eta_m)}{f'(x_m)} = 0 \longrightarrow \varepsilon_{m+1} + \frac{\varepsilon_m^2}{2} \frac{f''(\eta_m)}{f'(x_m)} = 0$$

$$\to \lim_{m \to +\infty} \frac{\varepsilon_{m+1}}{\varepsilon_m^2} = \lim_{m \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{f''(\eta_m)}{f'(x_m)} \right] = -\frac{1}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} = c$$

$$x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)} = x_{m+1}$$

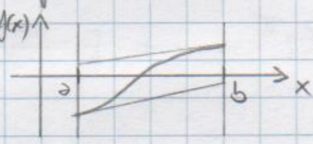
$$\varepsilon_m = \xi - x_m$$

$$x_m < \eta_m < \xi \quad \Downarrow \quad \to \xi$$

$\to$ convergenza di ordine 2.

Oss: È possibile lavorare con ipotesi meno restrittive, ma la convergenza non è assicurata.

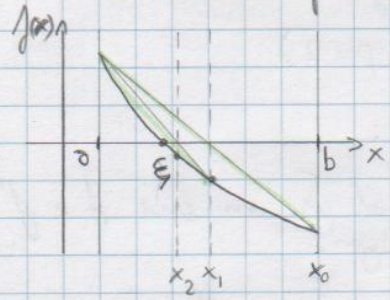
es: H_p: $f'(\xi)=0$ con



genera un loop.

- Metodo delle corde ($p=1$)

Sotto le stesse ipotesi del metodo di bisezione:



Passi: 1) $x_0 = b$;

2) Traccio la corda $\overline{a x_0}$ e ricavo l'intersez. con l'asse x:

$$\begin{cases} \dfrac{y - f(x_0)}{f(a) - f(x_0)} = \dfrac{x - x_0}{a - x_0} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\to x_1 = x_0 - f(x_0)/[f(x_0) - f(a)] \cdot (x_0 - a)$$

3) $x_0 = x_1$;

goto ②;

Si ha quindi $x_0 > x_m > \xi \Rightarrow \{x_m\}$ è succ. monotona decrescente e limitata a ξ, cioè:

$$\lim_{m \to \infty} x_m = \xi^* \quad , \quad \xi^* = \sup\{x_m\}$$

passando al limite:

$$\xi^* = \xi^* - f(\xi^*)/\underbrace{[f(\xi^*) - f(a)]}_{<0} \cdot \underbrace{(\xi^* - a)}_{>0} \iff f(\xi^*)=0 \ , \ \exists! \xi : f(\xi)=0 \Rightarrow \xi^* = \xi$$